

Geometría I

Examen I

FACULTAD
DE
CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE GRANADA



Los Del DGIIM, [losdeldgiim.github.io](https://github.com/losdeldgiim)

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

Geometría I

Examen I

Los Del DGIIM, [losdeldgiim.github.io](https://github.com/losdeldgiim)

Arturo Olivares Martos
Jesús Muñoz Velasco

Granada, 2023-24

Asignatura Geometría I.

Curso Académico 2022-23.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Prácticas B.

Profesor Juan de Dios Pérez Jiménez.

Descripción 1ª Prueba. Temas 1 y 2.

Fecha 28 de noviembre de 2022.

Duración 60 minutos.

En el espacio vectorial \mathbb{R}^4 se consideran los siguientes subconjuntos vectoriales:

$$U_1 = \mathcal{L}(\{(1, -1, -1, 1)\})$$

$$U_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 0\}$$

Ejercicio 1. [3 puntos] Comprueba que $U_1 \subset U_2$ y calcula dos planos (subespacios de dimensión 2) de \mathbb{R}^4 cuya intersección sea U_1 y su suma sea U_2 .

Para ver que $U_1 \subset U_2$ bastará con ver que el vector que genera U_1 está contenido en U_2 , es decir, que el vector $(1, -1, -1, 1)$ verifica la ecuación $x + y + z + t = 0$,

$$1 - 1 - 1 + 1 = 0 \Rightarrow U_1 \subset U_2$$

Veamos la segunda parte del ejercicio. Para ello, busquemos los vectores que generan U_2 . Dado que U_2 tiene una única ecuación implícita y está en \mathbb{R}^4 , estará generado por 3 vectores linealmente independientes. Sabemos además que el vector $(1, -1, -1, 1)$ es una solución. Busquemos 2 más linealmente independientes:

$$\text{Para } x = -1, y = 0, z = 1 \Rightarrow t = 0 \Rightarrow (-1, 0, 1, 0) \in U_2$$

$$\text{Para } x = -1, y = 1, z = 0 \Rightarrow t = 0 \Rightarrow (-1, 1, 0, 0) \in U_2$$

Veamos que los 3 vectores buscados son linealmente independientes:

$$\text{Rango} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3, \text{ ya que } \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Por tanto, tenemos que $U_2 = \mathcal{L}\{(-1, 0, 1, 0), (-1, 1, 0, 0), (1, -1, -1, 1)\}$.

Busquemos ahora dos planos W_1 y W_2 tal que $W_1 \cap W_2 = U_1$ y $W_1 + W_2 = U_2$. De la primera condición sabemos que $U_1 \subset W_1$ y $U_1 \subset W_2$. Por tanto, tenemos que

$$W_1 = \mathcal{L}\{(1, -1, -1, 1), v_1\}$$

$$W_2 = \mathcal{L}\{(1, -1, -1, 1), v_2\}$$

Con v_1 y v_2 linealmente independientes (ya que sino tendríamos $W_1 = W_2$ y $W_1 \cap W_2 = W_1 \cap W_1 = W_1$, de dimensión 2, por lo que $W_1 \cap W_2 \neq U_1$, que sería una contradicción).

Además, como $W_1 + W_2 = U_2$ tenemos que $\mathcal{L}\{(1, -1, -1, 1), v_1, v_2\} = U_2$. Con lo calculado anteriormente es fácil ver que $v_1 = (-1, 0, 1, 0)$ y $v_2 = (-1, 1, 0, 0)$ verifican todo lo pedido, ya que hemos visto que son linealmente independientes y además $U_2 = \mathcal{L}\{(-1, 0, 1, 0), (-1, 1, 0, 0), (1, -1, -1, 1)\}$. Por tanto los espacios buscados son:

$$W_1 = \mathcal{L}\{(1, -1, -1, 1), (-1, 0, 1, 0)\}$$

$$W_2 = \mathcal{L}\{(1, -1, -1, 1), (-1, 1, 0, 0)\}$$

Ejercicio 2. [3 puntos] ¿Son únicos dichos planos, o existen otros dos con la misma intersección y la misma suma?

Por la forma en la que lo hemos calculado, cualquiera 2 vectores de U_2 linealmente independientes entre sí y a $(1, -1, -1, 1)$ podrían dar una solución. Busquemos entonces otros vectores que generen U_2 :

$$\begin{aligned} \text{Para } x = 0, y = 1, z = 0 &\Rightarrow t = 1 \Rightarrow (0, 1, 0, 1) \in U_2 \\ \text{Para } x = 1, y = 0, z = 0 &\Rightarrow t = -1 \Rightarrow (1, 0, 0, -1) \in U_2 \end{aligned}$$

Veamos que son linealmente independientes:

$$\text{Rango} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 3, \text{ ya que } \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Con el razonamiento anterior tenemos que

$$\begin{aligned} W_1 &= \mathcal{L}\{(1, -1, -1, 1), (0, 1, 0, 1)\} \\ W_2 &= \mathcal{L}\{(1, -1, -1, 1), (1, 0, 0, -1)\} \end{aligned}$$

Verifican también las condiciones buscadas. Por tanto la solución anterior no es única.

Ejercicio 3. [4 puntos] Calcula un complementario de U_1 y otro de U_2 .

Comencemos buscando el complementario de U_1 . Para ello buscamos 3 vectores linealmente independientes, $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^4$ tales que $\mathcal{L}\{v_1, v_2, v_3\} \oplus U_1 = \mathbb{R}^4$, es decir linealmente independientes a $(1, -1, -1, 1)$. Veamos que el espacio dado por el conjunto $C_1 = \mathcal{L}\{(0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$ lo verifica, ya que:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Por tanto, $C_1 = \mathcal{L}\{(0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$ es un complementario de U_1 .

Hagamos lo mismo para U_2 . En este caso buscamos un único vector linealmente independiente a $(-1, 0, 1, 0), (-1, 1, 0, 0), (1, -1, -1, 1)$. Veamos que el vector $(1, 0, 0, 0)$ verifica lo que buscamos:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Y tenemos que $C_2 = \mathcal{L}\{(1, 0, 0, 0)\}$ es un complementario de U_2 .